Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

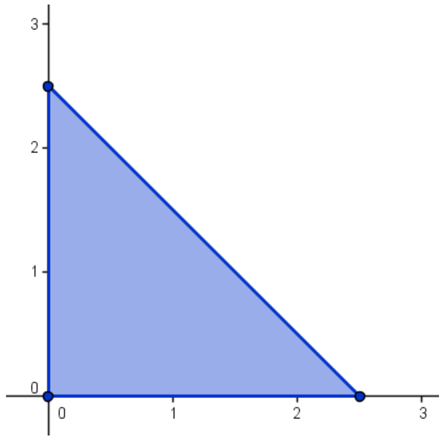
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 10

Eine stetige Funktion nimmt immer auf einer kompakten Menge in $\mathbb{R}^n$ ihre globalen Extrema an. Bei stetig partiell differenzierbaren Funktionen kann man sie analog wie im eindimensionalen Fall bestimmen. Nämlich, die Extrema können im Inneren oder auf dem Rand liegen. Im ersten Falle geht es um ein lokales Extremum, also muss dort $Df = 0$ gelten. Das Verhalten auf dem Rand muss separat untersucht werden. Allerdings ist das in höheren Dimensionen aufwendiger als in der Dimension 1, wo der Rand eines Intervalls nur aus zwei Punkten besteht.



In der Aufgabe 3 werden die globalen Extrema auf dem abgebildeten Dreieck gesucht. Der Rand des Gebiets sind hier die drei Seiten des Dreiecks. Die Kandidaten für die Extrema sind also die lokalen Extrema im Inneren und die Extremwerte auf den Seiten.

Präsenzaufgaben

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 11. und 12. Juli in den Übungen besprochen.

1. Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

auf lokale Extrema. Besitzt Sie auch globale Extrema auf $\mathbb{R}^2$?

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 16. Juli 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Zeigen Sie Folgendes:

(a) A ist positiv definit genau dann, wenn $\det A > 0$ und $\mathrm{Spur} A > 0$.

(b) A ist negativ definit genau dann, wenn $\det A > 0$ und $\mathrm{Spur} A < 0$.

(c) A ist indefinit genau dann, wenn $\det A < 0$.

Die Spur einer Matrix ist die Summe deren Diagonaleinträge.

2. Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom um den Ursprung von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := 2x + (1 + y)^2 \cdot \sin(x + z)$$

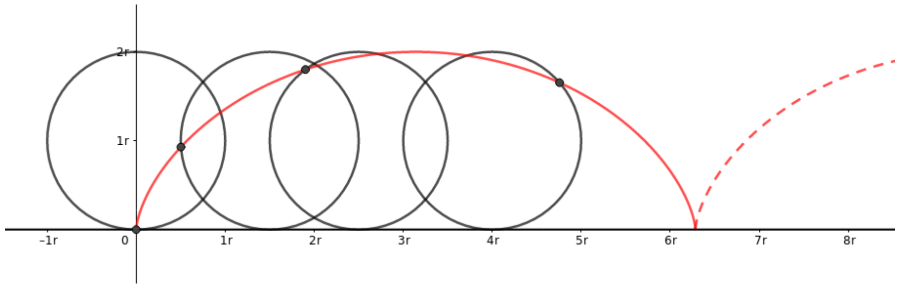
und berechnen Sie damit den Näherungswert von $1{,}1^2 \cdot \sin 0{,}3$.

3. Bestimmen Sie das Minimum und Maximum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := xy^2(3 - x - y)$$

auf dem (abgeschlossenen) Dreieck mit den Ecken in $(0, 0)$, $(0, \frac{5}{2})$ und $(\frac{5}{2}, 0)$.

4. Beim Rollen einer Walze mit Radius r beschreibt ein beliebiger Punkt auf deren Kante die auf dem Bild gezeichnete Kurve.



Diese Kurve heißt Zykloide und besitzt die Parametrisierung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Länge des ersten Zweiges der Zykloide $\boldsymbol{\gamma}$, also den Weg, den der Punkt bis zur nächsten Berührung des Bodens zurücklegt. (Auf dem Bild ist $\boldsymbol{\gamma}$ die rote durchgezogene Linie.)